

DOLOČANJE SNOVNIH LASTNOSTI MATERIALA ZA RAČUNANJE NOSILNOSTI VELIKIH KOTALNIH LEŽAJEV Z MEHANIKO POŠKODBE

DETERMINATION OF MATERIAL PROPERTIES FOR THE CALCULATION OF LARGE ROLLING BEARING CARRYING CAPACITY USING DAMAGE MECHANICS

Robert Kunc¹, Ivan Prebil¹, Jože Korelc², Tomaž Rodič³, Matjaž Torkar⁴

¹Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva cesta 6, SI-1000 Ljubljana, Slovenija

²Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova cesta 2, SI-1001 Ljubljana, Slovenija

³Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta, Aškerčeva cesta 12, SI-1001 Ljubljana, Slovenija

⁴Inštitut za kovinske materiale in tehnologije, Lepi pot 11, SI-1001 Ljubljana, Slovenija
robert.kunc@fs.uni-lj.si

Prejem rokopisa - received: 2000-12-19; sprejem za objavo - accepted for publication: 2001-03-30

V prispevku je prikazan Pedersenov model mehanike poškodbe kontinuuma ter eksperimentalno numerična določitev snovnih lastnosti materiala 42CrMo4 (ISO 683/1) za različna stanja obroča ležaja velikih dimenzij. Model omogoča simulacijo elastičnih in plastičnih specifičnih deformacij ter napetosti v odvisnosti od števila nihajev obremenitve. Model upošteva izotropno in kinematično utrjevanje oziroma mehčanje ter rast poškodb materiala z večanjem števila nihajev. Poškodbeni model je integriran v numerični model končnih elementov, s katerim je narejena simulacija odziva materiala in njena primerjava z eksperimentom.

Ključne besede: aksialni ležaj velikih dimenzij, kotalni stik, malociklična nosilnost, poškodba, plastifikacija

The article considers Pedersen's damage model and the experimental-numerical determination of the material parameters for various states of bearing ring material 42CrMo4 (ISO 683/1). The model allows an evaluation of elastic and plastic strain and stress distributions as a function of the number of loading cycles. The model includes isotropic and kinematic hardening or softening and the evolution of damage with the number of cycles. The damage model is implemented into a finite-element code, which has been assessed with respect to results of an experimental test.

Key words: large axial rolling bearings, rolling contact, low-cycle carrying capacity, damage, plasticity

NOMENKLATURA

A	nepoškodovani prerez
A _D	poškodovani prerez
D	poškodba
D _c	kritična vrednost poškodbe
E	elastični modul
L _{ijkl}	tenzor elastičnih konstant
R	izotropno utrjevanje
R _o	mejna vrednost izotropnega mehčanja
R _∞	trenutna mejna vrednost izotropnega utrjevanja
R _{∞,s}	mejna vrednost izotropnega utrjevanja
S	odpornostna energija poškodbe
X _{ij}	središče napetostnega prostora
X _∞ ⁽ⁿ⁾	mejna vrednost koeficienta kinematičnega utrjevanja
b	koeficient izotropnega utrjevanja/mehčanja
f	napetostni potencial
k	velikost elastičnega območja
m _n	Ohno-Wang-ov snovni parameter
p	primerjalna specifična plastična deformacija
p _d	začetni prag poškodbe
Λ	velikost neproporcionalnosti

γ ⁽ⁿ⁾	stopnja kinematičnega utrjevanja
ε _{ij}	tenzor majhnih specifičnih deformacij
Δλ	plastični multiplikator
v	Poissonovo število
σ	napetost
σ _y	napetost tečenja
σ _{max} ⁿ	največja napetost v n-tem nihaju
σ _{max} ^s	največja napetost pri stabilizaciji

1 UVOD

Pri določanju nosilnosti počasi se vrtečih aksialnih kotalnih ležajev velikih dimenzij s površinsko utrjeno tečino s standardizirano dopustno trajno deformacijo ¹ ali priporočilom, ki določa dopustno podpovršinsko napetost ², ne dobimo zadovoljivih rezultatov. Razlog je v neustreznosti meril, ki ne upoštevajo v celoti značilnosti kotalnega stika velikih kotalnih ležajev. Tudi pri dopolnjenem merilu dopustnih podpovršinskih napetosti, ki upošteva malociklične lastnosti materiala ležajnega obroča ³, je preračunana trajna deformacija ležajne tečine od eksperimentalno izmerjenih rezultatov tudi do 100% drugačna.

Določiti želimo realno nosilnost kotalnega stika velikih kotalnih ležajev ob predpostavki, da realne razmere zunanjih obremenitev povzročajo neenakomernost porazdelitve zunanje obremenitve po obodu kotalnih elementov in s tem trajno deformacijo tečine ležaja oziroma njeno plastično deformacijo. Zaradi tega smo se odločili za preračun nosilnosti kotalnega stika ob upoštevanju mehanike poškodbe, pri katerem spremljamo spreminjanje elastične in plastične deformacije ter napetosti in nastanek poškodb materiala kot funkcijo velikosti in števila nihajev obremenitve ^{4,6,11}.

2 MEHANIKA POŠKODBE

2.1 Mehanski princip

Poškodbo si razlagamo kot nastanek mikropovršin oziroma mikroraztrganin, ki so posledica večanja števila dislokacij, interakcij med njimi in porušitev medatomskih vezi. Porušitve in interakcije dislokacij povzročajo nastanek površin, ki so glede na posamezne koordinatne smeri različnih velikosti. Novo nastale površine so torej skupni učinek mikropoškodb pri volumskem elementu - podobno kot specifična plastična deformacija, ki je povprečje večjega števila zdrsov. Efektivno oziroma dejansko napetost v poškodovanem materialu določimo s predpostavko (1), da se imenski prerez zmanjša za velikost poškodovane površine prereza ⁵:

$$D(M, \bar{n}, x) = \frac{\delta A_{Dx}}{\delta A} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{F}{A - A_D} = \frac{F/A}{1 - A_D/A} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1)$$

Koncept poškodbe materiala je vgrajen v konstitutivni model za majhne specifične deformacije, ki jih razdelimo na elastični in plastični del:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (2)$$

kjer je zveza med napetostmi in deformacijami določena z:

$$\sigma_{ij} = (1 - D)L_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}. \quad (3)$$

Plastične deformacije določa zakon tečenja:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4)$$

Napetostni potencial ⁶ je funkcija napetostnega tenzorja in utrjevalnih komponent X_{ij} in R ter poškodbe materiala D . Za izotermno stanje $dT/dt = 0$ je reološki model oziroma evolucijska enačba napetostnega potenciala določena z ^{6,11}:

$$f = \bar{\sigma}_{eq} - (R + k) = 0, \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}}, \quad \tilde{s}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{\sigma}_k,$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} - X_{ij} \quad (6)$$

Z odvajanjem enačbe (5) dobimo:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} \dot{X}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D}, \quad (7)$$

kjer je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}_{ij}}{(1 - D)\bar{\sigma}_{eq}}; & \frac{\partial f}{\partial R} &= -1 \\ \frac{\partial f}{\partial X_{ij}^D} &= \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}_{ij}}{\bar{\sigma}_{eq}}; & \frac{\partial f}{\partial D} &= \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}}{(1 - D)\bar{\sigma}_{eq}} \end{aligned} \quad (8)$$

2.1.1 Kinematični model utrjevanja

Kinematično utrjevanje opisuje tenzor X_{ij} , ki določa središče napetostnega prostora. Upoštevali smo evolucijske enačbe, ki so jih predložili Armstrong in Frederick ¹⁰ ter Chaboche ^{7,8,14,18}.

$$X_{ij} = \sum_{n=1}^3 X_{ij}^{(n)}; \quad \dot{X}_{eq}^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} X_{ij}^{(n)} \dot{X}_{ij}^{(n)} \quad (9)$$

$$\dot{X}_{ij}^{(n)} = \frac{2}{3} \gamma^{(n)} X_{ij}^{(n)} (1 - D) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl,c} - \left(\frac{X_{eq}^{(n)}}{X_{\infty}^{(n)}} \right)^{m_n} X_{ij}^{(n)} \gamma^{(n)} \dot{\lambda} \quad (10)$$

2.1.2 Izotropno utrjevanje / mehčanje

Material se ciklično utrjuje ali mehča, če se pri procesu cikličnega obremenjevanja površina tečenja veča ali manjša. Pri simetričnem enosnem cikličnem obremenjevanju s kontrolo raztezka (konstantna amplituda raztezka) se amplitude napetosti povečujejo ali manjšajo. Pri konstantni amplitudi napetosti pa se amplitude raztezka zmanjšujejo ali večajo. Zasičenost cikličnega utrjevanja je enaka rasti plastičnega raztezka. Ciklična krivulja σ - ε leži nad monotono krivuljo σ - ε ali pod njo ⁶.

Velikost površine tečenja opisujeta skalarja R in k . R je spremenljivka, ki opisuje izotropno ciklično utrjevanje oziroma mehčanje materiala. Začetne vrednosti pri cikličnem utrjevanju so: $k = \sigma_y$ in $R = 0$; Pri cikličnem mehčanju pa so: $k = \sigma_y - R_0$ in $R = R_0$. Evolucijska enačba za spremenljivko R je podana v obliki:

$$\dot{R} = b(R_{\infty}(\Lambda, q) - R)\dot{\lambda} \quad (11)$$

kjer je b snovni parameter, ki določa stopnjo izotropnega utrjevanja ali mehčanja. Parameter $R_{\infty}(\Lambda, q)$ pa določa mejo izotropnega cikličnega utrjevanja ali mehčanja ^{11,13}.

Vpliv neproporcionalnosti obremenitve na ciklično utrjevanje ali mehčanje materiala smo privzeli po Benallal-u ¹⁵. Skalar Λ je uporabljen za oceno velikosti neproporcionalnosti obremenitve. Spremenljivka q pa določa pomik plastičnega raztezka ¹².

2.2 Mehanika poškodbe kontinuuma

Mehanika poškodbe kontinuuma obravnava poškodbe materiala pri cikličnem obremenjevanju. Rast poškodb materiala lahko eksperimentalno določamo na več načinov ^{4,5,6}. Pri plastično deformiranem materialu

pomenijo že majhne spremembe elastičnega modula slabitev materiala zaradi rasti poškodbe ⁵:

$$\tilde{E} = (1 - D) \cdot E. \quad (12)$$

Nepovratno rast poškodbe popiše evolucijska enačba ^{4,11,16,17}, ki upošteva proporcionalni vpliv efektivne plastične deformacije na spremembo poškodbe. Evolucijska enačba za popis (modeliranje) krhke in žilave poškodbe je podana v obliki:

$$\dot{D} = \frac{\sigma_{eq}^2 \left(\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_{kk}}{3\sigma_{eq}} \right)^2 \right)}{2 \cdot S \cdot E(1 - D)^2} \dot{p} \cdot \alpha(p);$$

$$\alpha(p) = \begin{cases} 1, & \text{za } p \geq p_d \\ 0, & \text{za } p < p_d \end{cases}. \quad (13)$$

Mejo p_D , pri kateri začne poškodba naraščati, določa akumulirana plastična deformacija p ⁶:

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D}, \quad p_D = \text{Max}(p_{(D=0)}). \quad (14)$$

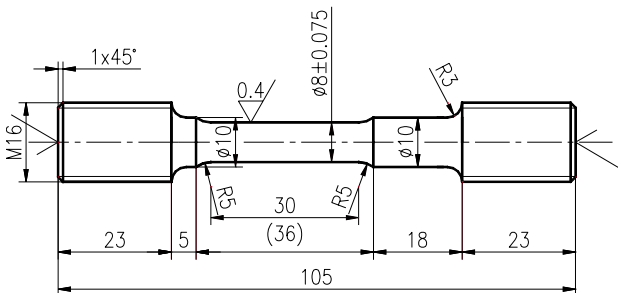
Teroterično pretrganje materiala nastopi, ko je velikost razpoke enaka velikosti elementa; to je, ko doseže poškodba D vrednost 1! V večini primerov pa nastopi pretrganje preostalega dela trenutno, kar povzroči padec kritične vrednosti D_C :

$$D_C = \text{Max}(D_{(p)}) = D_C \approx 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u}. \quad (15)$$

3 EKSPERIMENTALNO DELO

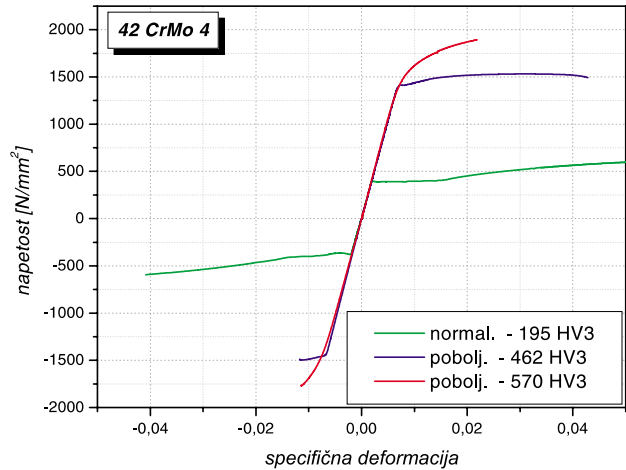
Preizkušanci so bili izdelani iz malolegiranega jekla za poboljšanje 42 CrMo 4 (ISO 683/1; W.Nr. 1.7225). Jeklo je bilo toplotno obdelano tako, da so imeli preizkušanci po toplotni obdelavi različno trdoto. Analiza jekla je bila izvršena s kvantometrom ARL.

Natezno-tlačni in ciklični preizkusi so bili izvršeni na univerzalnem hidravličnem preizkuševališču Instron 1255, kjer smo podatke pridobili z merilnim sistemom National Instruments. Raztezek je izmerjen neposredno na preizkušancu z dinamičnim merilnikom raztezka "Dynamic Strain Gauge Ekstenziometer 2620-604",



Slika 1: Preizkušanec

Figure 1: Test specimen



Slika 2: Krivulje natezno-tlačnih preizkusov

Figure 2: Static tensile and compressive test

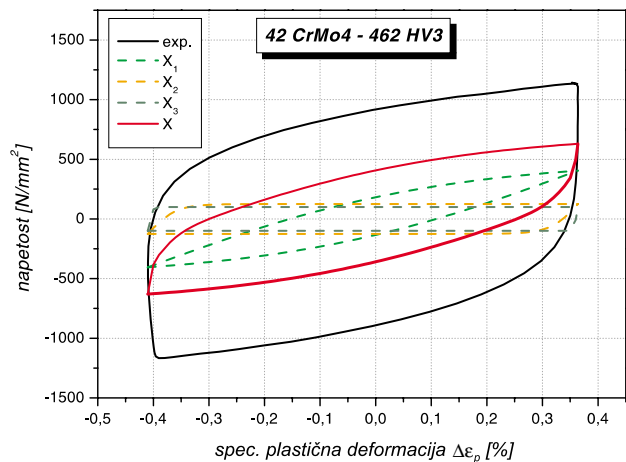
obremenitev pa z natezno-tlačnim senzorjem sile Lebow ³.

Obliko preizkušancev smo prilagodili tako, da so bile koncentracije napetosti na prehodih razmeroma majhne. Glavna os preizkušancev je bila (slika 1) prečno na smer valjanja materiala.

3.1 Obremenitveni kolektiv

Najprej so bili narejeni monotoni natezno-tlačni preizkusi do porušitve preizkušanca (slika 2) nato pa vrsta cikličnih enosnih preizkusov s kontrolo amplitude deformacije za določanje cikličnih parametrov materiala (preizkusi pri različnih vrednostih amplitud deformacije). V praksi zadostuje za dobro simulacijo odzivov materiala že manjše število enosnih cikličnih preizkusov ¹¹.

Da se izognemo lokalnem zoženju premera merilne dolžine, je treba natezno tlačni preizkus izvesti pri kon-



Slika 3: Določanje koeficientov kinematičnega utrjevanja (kontrola spec. deformacije: $\Delta\epsilon = 1,0\%$, $\epsilon_{sred} = 0$)

Figure 3: Determination of the kinematics hardening coefficients (strain control: $\Delta\epsilon = 1.0\%$, $\epsilon_{mean} = 0$)

Tabela 1: Kemijska sestava jekla 42CrMo4 (v %)
Table 1: Chemical composition of steel 42 CrMo 4 (values in %)

	C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Mo	Cu	Al	Sn
42CrMo4	0,43	0,26	0,65	0,015	0,021	1,07	0,19	0,16	0,16	0,021	0,006

Tabela 2: Parametri materiala poškodbenega modela za jeklo 42 CrMo 4, ki je bilo poboljšano na 462 HV
Table 2: Material damage model parameters of steel 42 CrMo 4, tempered to 462 HV

E	σ_y	ν	b	$R_{\infty,s}$	R_0	γ_1	γ_2	γ_3	$X_{\infty 1}$	$X_{\infty 2}$	$X_{\infty 3}$	m_1	m_2	m_3	S	p_d	D_c
195000	650	0,3	5	0	380	190	2000	15000	900	250	200	5	5	5	120	0	0,2

stanтни amplitudi raztezka. Mehanske lastnosti materiala so bile izmerjene pri temperaturi 20 °C.

4 REZULTATI

Kemijska sestava uporabljenega jekla je podana v **tabeli 1**.

4.1 Določanje snovnih parametrov

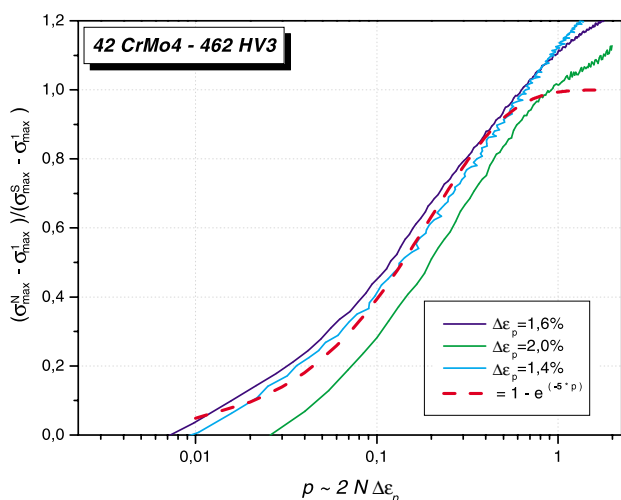
Obraunavani poškodbeni model vsebuje 23 snovnih parametrov. Večino parametrov smo določili neposredno z eksperimentom (**tabela 2**), druge pa po inverzni metodi, kjer smo parametre spreminjali tako, da je bilo ujemanje med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati čim boljše.

4.1.1 Določanje monotonih parametrov materiala

Osnovne parametre materiala, kot so elastični modul - E, Poisson-ovo število ν in napetost tečenja σ_y , smo določili s standardnimi monotonimi enoosnimi natezno-tlačnimi preizkusi (**slika 2**).

4.1.2 Določanje malocikličnih parametrov izotropnega in kinematičnega utrjevanja

Parametre za opis kinematičnega utrjevanja smo določili s ciklično krivuljo σ - ϵ , dobljene s kontrolo



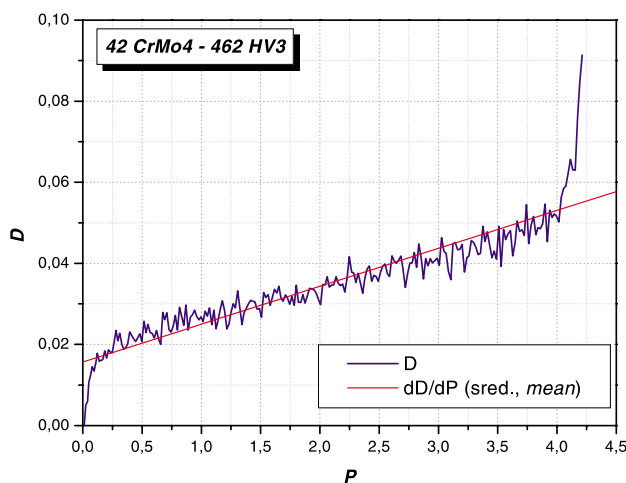
Slika 4: Določanje koeficientov izotropnega mehčanja
Figure 4: Determination of the isotropic hardening coefficient

amplitude deformacije. Za različne amplitude deformacije $\Delta\epsilon$ dobimo po stabilizaciji histerezne zanke ustrezne amplitude plastične spec. deformacije $\Delta\epsilon_p$ in amplitude napetosti $\Delta\sigma$ (**Slika 3**).

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = (R_{\infty,s} + k) + X_{\infty}^1 \cdot \tanh\left(\gamma^1 \frac{\Delta\epsilon^p}{2}\right) + X_{\infty}^2 \cdot \tanh\left(\gamma^2 \frac{\Delta\epsilon^p}{2}\right) + X_{\infty}^3 \cdot \tanh\left(\gamma^3 \frac{\Delta\epsilon^p}{2}\right) \quad (16)$$

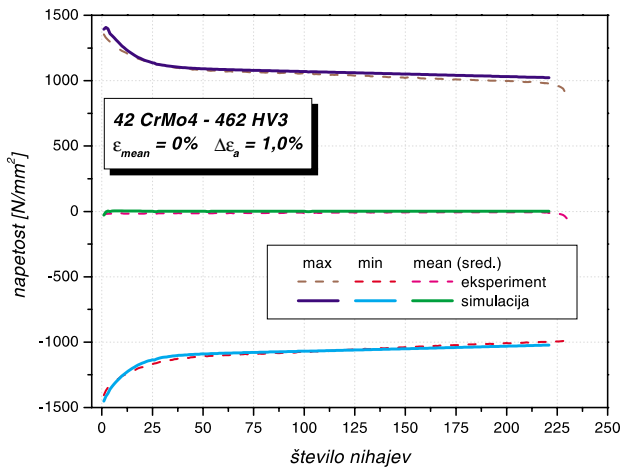
Parametri materiala γ^1 , γ^2 , γ^3 , X_{∞}^1 , X_{∞}^2 in X_{∞}^3 so določeni s prileganjem krivulje (enačba 16) z eksperimentalno dobljenim rezultatom. Istočasno se določi tudi parametra $R_{\infty,s}$ in k . Iz preizkusa je viden trend zmanjševanja maksimuma in minimuma napetosti v odvisnosti od števila nihajev, kar pomeni, da se material mehča (**slika 6**). Ohno-Wang faktorje m_1 , m_2 in m_3 določimo s korelacijo simuliranega odziva materiala z eksperimentalnim. Pri tem uporabimo nesimetričen enoosni ciklični preizkus z lezenjem oziroma z zmanjševanjem srednje vrednosti napetosti (**slika 8**).

Stopnjo izotropnega utrjevanja ali mehčanja določa parameter b . Določimo ga s prileganjem vrednosti iz enačbe (17) glede na preizkuse s kontrolo amplitude spec. deformacije $\Delta\epsilon$ (**slika 4**):



Slika 5: Določanje funkcije rasti poškodbe (kontrola spec. deformacije: $\Delta\epsilon = 1,0\%$, $\epsilon_{sred} = 0$)

Figure 5: Determination of the damage growth as a function of accumulated plastic strain (strain control: $\Delta\epsilon = 1,0\%$, $\epsilon_{mean} = 0$)



Slika 6: Potek amplitud napetosti (kontrola spec. deformacije: $\Delta\varepsilon = 1,0\%$, $\varepsilon_{\text{sred}} = 0$)

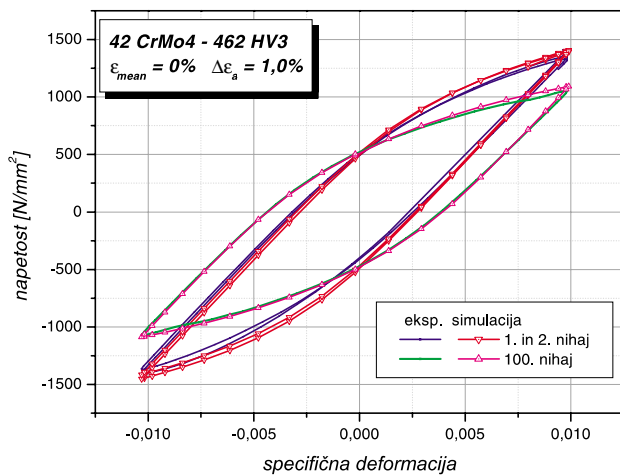
Figure 6: Peak stress vs. number of cycles (strain control: $\Delta\varepsilon = 1.0\%$, $\varepsilon_{\text{mean}} = 0$)

$$\frac{\sigma_{\text{max}}^N - \sigma_{\text{max}}^1}{\sigma_{\text{max}}^s - \sigma_{\text{max}}^1} = 1 - \exp(-2b \cdot \Delta\varepsilon^p \cdot N) \quad (17)$$

4.1.3 Določanje poškodbenih parametrov pri malociklični obremenitvi

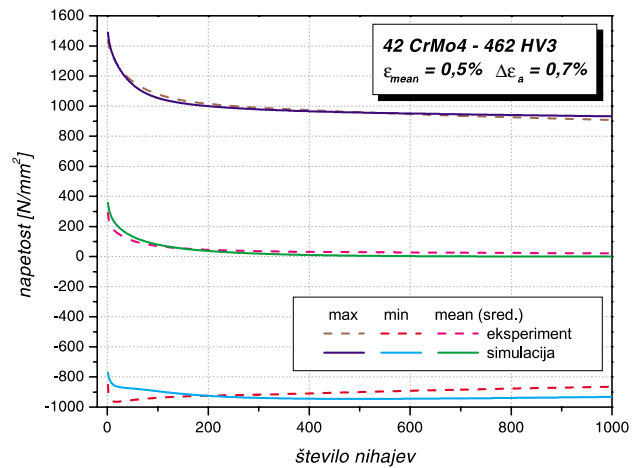
Za opis poškodbe potrebujemo tri materialne parametre: p_a , S in D_c . Rast poškodbe v odvisnosti od nihanja obremenitve določa sprememba elastičnega modula materiala. Povprečno vrednost parametra S določimo pri različnih obremenitvenih kolektivih preizkusa in napetostih σ ter rasti poškodbe v odvisnosti od akumulirane plastične deformacije p **(slika 5)**:

$$S = \frac{\sigma^2}{2E(1-D)^2} \frac{dD}{dp}, \quad p = 2 \sum_{i=1}^N \Delta\varepsilon_i^p \quad (18)$$



Slika 7: Potek histerez σ - ε (kontrola spec. deformacije: $\Delta\varepsilon = 1,0\%$, $\varepsilon_{\text{sred}} = 0$)

Figure 7: Comparison of σ - ε hysteresis (strain control: $\Delta\varepsilon = 1.0\%$, $\varepsilon_{\text{mean}} = 0$)



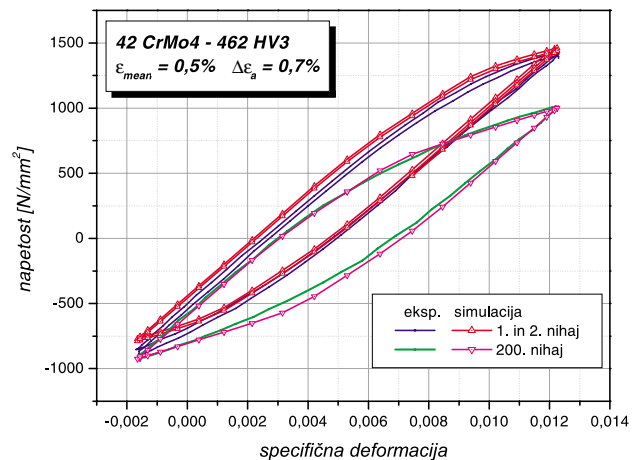
Slika 8: Potek amplitud napetosti (kontrola spec. deformacije: $\Delta\varepsilon = 1,4\%$, $\varepsilon_{\text{sred}} = 0,5\%$)

Figure 8: Peak stress vs. number of cycles (strain control: $\Delta\varepsilon = 1.4\%$, $\varepsilon_{\text{mean}} = 0.5\%$)

5 DISKUSIJA REZULTATOV

Poškodbeni model smo vgradili v računalniški program, ki temelji na metodi končnih elementov ^{19,20}. Za razvoj programa smo uporabili splošen simbolični način ^{19,20}, ki omogoča izdelavo učinkovite, kvadratično konvergentne, implicitne numerične sheme tudi v primeru velikega števila evoliucijskih enačb in povezanih nelinearnih sistemov. S programom smo analizirali eksperimente **(tabela 2)**.

Iz primerjave numeričnih in eksperimentalnih rezultatov je opazno zelo dobro ujemanje maksimalne in minimalne napetosti v odvisnosti od števila nihajev obremenitve **(sliki 6 in 8)** kakor tudi velikost in obliko histereznih zank **(sliki 7 in 9)**. Zmanjševanje amplitud in srednje vrednosti napetosti na začetku obremenjevanja (do stabilizacije histereznih zank) dobro opišeta simu-



Slika 9: Potek histerez σ - ε (kontrola spec. deformacije: $\Delta\varepsilon = 1,4\%$, $\varepsilon_{\text{sred}} = 0,5\%$)

Figure 9: Comparison of σ - ε hysteresis (strain control: $\Delta\varepsilon = 1.4\%$, $\varepsilon_{\text{mean}} = 0.5\%$)

lacija izotropnega mehčanja in kinematičnega utrjevanja. Po stabilizaciji histereznih zank oziroma po zmanjšanju vpliva kinematičnega in izotropnega utrjevanja ima glavni vpliv na napetostno-deformacijsko stanje rast poškodbe materiala. Večanje poškodbe povzroči rahlo zmanjševanje amplitude napetosti vse do končne porušitve.

6 SKLEPI

Za določanje realne nosilnosti počasi vrtečih se aksialnih kotalnih ležajev velikih dimenzij s površinsko utrjeno kotalno tečino potrebujemo preračun nelinear-nega napetostno-deformacijskega stanja v ležajnem obroču. Numerični preračun z upoštevanjem mehanike poškodb zelo dobro opiše nelinearni odziv materiala na malociklično obremenjevanje tako po velikosti amplitud deformacije in napetosti kakor tudi po obliki histereznih zank.

Z mehaniko poškodbe želimo izračunati velikost podpovršinskih deformacij in napetosti kakor tudi poškodbe osnovnega in utrjenega materiala na meji površinsko kaljene plasti. S takšno analizo nameravamo določiti kritična mesta in število obremenitvenih ciklov do nastanka poškodbe ter dobiti oceno o hitrosti širjenja poškodb.

Za modeliranje realnih razmer kotalnega stika je treba določiti poškodbene parametre za celoten prerez ležajnega obroča. To pomeni določitev parametrov za površinsko kaljeno plast tečine in tudi zmanjšanje napetosti v osnovnem materialu obroča ležaja pod kaljeno tečino.

7 LITERATURA

- ¹ ISO 76, Rolling bearings - Static load ratings, 1987
- ² Pallini, R. A.; Sague, J. E.: Computing Core-Yield Limits for Case-Hardened Rolling Bearings, *ASLE Trans.*, 28 (1985) 1, 91-96
- ³ Kunc, R.; Prebil, I.; Torkar, M.: *Kovine zlit. tehnol.*, 34 (2000) 1-2, 31-35
- ⁴ Lemaitre, J.: A course on damage mechanics, *Springer-Verlag*, 1996
- ⁵ Lemaitre, J., Dufailly, J.: Damage measurements, *Engineering Fracture Mechanics*, 28 (1987) 5/6, 643-661
- ⁶ Lemaitre, J., Chaboche, J. L.: *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990
- ⁷ Bari, S., Hassan, T.: Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation, *International Journal of Plasticity*, 16 (2000), 381-409
- ⁸ Ohno, N., Wang, J. D.: Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I, *International Journal of Plasticity*, 9 (1993), 375-390
- ⁹ Ohno, N., Wang, J. D.: Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part II, *International Journal of Plasticity*, 9 (1993), 391-403
- ¹⁰ Armstrong, P. J., Frederick, C. O.: A mathematical representation of the multiaxial Baushinger effect, *CEGB Report RD/B/N 731*, 1966, Berkeley Nuclear Laboratories
- ¹¹ Petersen, T. O.: Cyclic Plasticity and low cycle fatigue in tool materials, Ph.D. Thesis, Dept. of Solid Mechanics, Technical university of Denmark, DCAMM Report S82, 1998
- ¹² Nielsen, H.S.: Intergranular fracture under creep fatigue interaction, Ph.D. Thesis, Dept. of Solid Mechanics, Technical university of Denmark, *DCAMM Report S68*, 1994
- ¹³ Calloch, S., Marquis, D.: Triaxial tension-compression tests for multiaxial cyclic plasticity, *International Journal of Plasticity*, 15 (1999), 521-549
- ¹⁴ Abdel-Karim, M., Ohno, N.: Kinematic hardening model suitable for ratchetting with steady-state, *International Journal of Plasticity*, 16 (2000), 225-240
- ¹⁵ Benallal, A., Billardon, R., Lemaitre, J.: Continuum damage mechanics and local approach to fracture: numerical procedures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 (1991), 141-155
- ¹⁶ Chaboche, J. L.: Continuum damage mechanics: part I - General concepts, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988), 59-64
- ¹⁷ Chaboche, J. L.: Continuum damage mechanics: part II - damage growth, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988), 65-72
- ¹⁸ Jiang, Y.; Kurath, P.: Characteristics of the Armstrong-Frederick type plasticity models, *International Journal of Plasticity*, 12 (1996) 3, 387-415
- ¹⁹ Korelc, J.: Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions, *Theoretical Computer Science*, 187 (1997), 231-248
- ²⁰ Korelc, J.: Automatic derivation of sensitivity terms for mixed Galerkin-collocation problems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 80 (2000) 2, 533-534